ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA – CORSO M

LAUREA Ing. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_22 Gennaio 2018 – Traccia III

COGNOME\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_NOME\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

NUMERO MATRICOLA: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Q1) Dare la definizione di base di uno spazio vettoriale e dimostrare che due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

Q2) Dimostrare che l’intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale.

Q3) Si discuta al variare di k in R, il seguente sistema:

e calcolare le soluzioni nel caso k = -1.

Q4) Data l’applicazione

1. dimostrare che f è lineare;
2. calcolare il sottospazio Im(f), una sua base e la dimensione;
3. calcolare il sottospazio Ker(f), una sua base e la dimensione.

Q5) Data la conica di equazione x2 - 4xy + 6x - 4y + 1 = 0,

1. classificare la conica (*specie e genere*);
2. calcolare l’equazione canonica.

Q6) In un riferimento cartesiano ortonormale di S3, siano dati il punto P(1,0,0) e la retta r di equazioni

1. Calcolare la retta r’ per P, incidente e perpendicolare ad r;
2. calcolare la distanza di P dalla retta r.

FOGLIO DELLE RISPOSTE

(Q1) (Sul foglio)

(Q2) (Sul foglio)

(Q3)

* Sistema determinato: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* Sistema indeterminato: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* Sistema incompatibile: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* Soluzione nel caso indeterminato: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(Q4)

1. (Dimostrazione sul foglio)
2. BIm(f) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ dim Im(f) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
3. BKer(f) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_dim Ker(f)= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(Q5)

1. Specie:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, Genere:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. Equazione canonica: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(Q6)

1. Equazioni di r’: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. d(P, r) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Soluzione

(Q1) Se V(K) è uno spazio vettoriale e se sono n vettori di V(K), si dice che

è una base di V(K) se

Se sono due basi di V(K), poiché gli elementi di una base rappresentano il maxx numero di vettori L.I. di uno spazio vettoriale, si ha:

Quindi, m = n.

(Q2) Siano . Dimostriamo che:

W è un sottospazio vettoriale di V(K).

Dunque: W è un sottospazio vettoriale di V(K).

(Q3) E’ dato il sistema

Le matrici associate al sistema sono:

.

Considerata la matrice A, si ha:

.

Discussione

1. Per k = -1, il sistema diventa e le matrici associate sono:

.

Poiché il sistema è compatibile e ammette

Quindi, il sistema è indeterminato: per nessun valore di k è determinato o impossibile.

Calcoliamo le soluzioni del sistema nel caso k = -1. Poiché , il sistema diventa:

Quindi le soluzioni del sistema sono:

,

(Q4) E’ data la funzione

1. Dimostriamo che f è un’applicazione lineare.

= (



.

Poiché (sono L.I.

Quindi, una base è e dim 3.

.

Dunque, Ker(f) non ha basi e dim Ker(f) = 0.

(Q5)

(a) E’ data la conica di equazione x2 - 4xy + 6x - 4y + 1 = 0.

Le matrici associate alla conica sono:

Poiché la conica è un’iperbole e poiché

la conica è non degenere.

1. Calcoliamo gli autovalori di A00.

L’equazione canonica dell’iperbole è

la cui matrice associata è

Imponiamo che

Quindi, l’equazione canonica dell’iperbole è

(Q6) Sono dati il punto P(1,0,0) e la retta r di equazioni

1. Calcoliamo i parametri direttori di r. Considerata la matrice , si ha:

.

Calcoliamo, ora, il piano passante per P(1,0,0) e perpendicolare alla retta r:

e sia

Quindi:

ha parametri direttori ed equazioni