ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA – CORSO M

LAUREA Ing. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_22 Gennaio 2018 – Traccia III

COGNOME\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_NOME\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

NUMERO MATRICOLA: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Q1) Dare la definizione di base di uno spazio vettoriale e dimostrare che due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

Q2) Dimostrare che l’intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale.

Q3) Si discuta al variare di k in R, il seguente sistema:

$$\left\{\begin{array}{c}\left(k+1\right)x-2z+t=k\\\left(3-k\right)x+2y+kz-t=0\end{array}\right.$$

e calcolare le soluzioni nel caso k = -1.

Q4) Data l’applicazione $f:R^{3}⟶R^{3} \ni ' ∀(x,y,z)\in R^{3}:f\left(x,y,z\right)=\left(x+y,y+z,x+z\right),$

1. dimostrare che f è lineare;
2. calcolare il sottospazio Im(f), una sua base e la dimensione;
3. calcolare il sottospazio Ker(f), una sua base e la dimensione.

Q5) Data la conica di equazione x2 - 4xy + 6x - 4y + 1 = 0,

1. classificare la conica (*specie e genere*);
2. calcolare l’equazione canonica.

Q6) In un riferimento cartesiano ortonormale di S3, siano dati il punto P(1,0,0) e la retta r di equazioni $\left\{\begin{array}{c}x-1=0\\y-z+2=0\end{array}\right. . $

1. Calcolare la retta r’ per P, incidente e perpendicolare ad r;
2. calcolare la distanza di P dalla retta r.

FOGLIO DELLE RISPOSTE

(Q1) (Sul foglio)

(Q2) (Sul foglio)

(Q3)

* Sistema determinato: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* Sistema indeterminato: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* Sistema incompatibile: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* Soluzione nel caso indeterminato: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(Q4)

1. (Dimostrazione sul foglio)
2. BIm(f) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ dim Im(f) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
3. BKer(f) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_dim Ker(f)= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(Q5)

1. Specie:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, Genere:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. Equazione canonica: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(Q6)

1. Equazioni di r’: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. d(P, r) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_.

Soluzione

(Q1) Se V(K) è uno spazio vettoriale e se $v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}$ sono n vettori di V(K), si dice che

$B=\left\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\right\}$ è una base di V(K) se

1. $B=\left\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\right\} è un sistema di generatori di V\left(K\right);$
2. $B=\left\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\right\} è un sistema di vettori L.I.$

Se $ B=\left\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\right\} e B'=\left\{v'\_{1},v'\_{2},…,v'\_{m}\right\}$ sono due basi di V(K), poiché gli elementi di una base rappresentano il maxx numero di vettori L.I. di uno spazio vettoriale, si ha:

1. $B=\left\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{n}\right\} base di V\left(K\right)⟹m\leq n;$
2. $B^{'}=\left\{v^{'}\_{1},v^{'}\_{2},…,v^{'}\_{m}\right\} di V\left(K\right)⟹n\leq m.$

Quindi, m = n.

(Q2) Siano $U\_{1} e U\_{2} due sottospazi di V\left(K\right) e sia W=U\_{1}∩ U\_{2}$. Dimostriamo che:

W è un sottospazio vettoriale di V(K).

1. $∀w\_{1},w\_{2}\in W=U\_{1}∩ U\_{2}:\left\{\begin{array}{c}w\_{1},w\_{2}\in U\_{1}\\w\_{1},w\_{2}\in U\_{2}\end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}w\_{1}+w\_{2}\in U\_{1}\\w\_{1}+w\_{2}\in U\_{2}\end{array}\right.\right.⟹w\_{1}+w\_{2}\in U\_{1}∩ U\_{2}=W.$
2. $∀k\in K e ∀∩ U\_{2}⟹\left\{\begin{array}{c}k\in K e w\in U\_{1}\\k\in K e w\in U\_{2} \end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}k∙w\in U\_{1}\\k∙w\in U\_{2}\end{array}⟹\right.\right.k∙w\in U\_{1}∩ U\_{2}=W.$

Dunque: W è un sottospazio vettoriale di V(K).

(Q3) E’ dato il sistema$\left\{\begin{array}{c}\left(k+1\right)x-2z+t=k\\\left(3-k\right)x+2y+kz-t=0\end{array}\right.$

Le matrici associate al sistema sono:

$A=\left(\begin{matrix}k+1&0&-2\\3-k&2&k\end{matrix}\begin{matrix} 1\\ -1\end{matrix}\right) e A^{'}=\left(\begin{matrix}k+1&0&-2 \\3-k&2&k \end{matrix}\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\begin{matrix} k\\ 0\end{matrix}\right)$.

Considerata la matrice A, si ha:

$a\_{12,12}=\left|\begin{matrix}k+1&0\\3-k&2\end{matrix}\right|=2\left(k+1\right)-0=0 ⟹k=-1$.

Discussione

1. $∀k\ne -1:rang\left(A\right)=2=rang\left(A^{'}\right)⟹il sistema è compatibile e ammette \infty ^{4-2}= \infty ^{2} soluzioni.$
2. Per k = -1, il sistema diventa $\left\{\begin{array}{c}-2z+t=-1\\4x+2y-z-t=0\end{array}\right.$ e le matrici associate sono:

$A=\left(\begin{matrix}0&0&-2\\4&2&-1\end{matrix}\begin{matrix} 1\\ -1\end{matrix}\right) e A^{'}=\left(\begin{matrix}0&0&-2 \\2&2&-1 \end{matrix}\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\begin{matrix} -1\\ 0\end{matrix}\right)$.

Poiché $a\_{12,13}=\left|\begin{matrix}0&-2\\4&-1\end{matrix}\right|=8\ne 0⟹rang\left(A\right)=2=rang\left(A^{'}\right)⟹$ il sistema è compatibile e ammette $\infty ^{2} soluzioni.$

Quindi, $∀k\in R $il sistema è indeterminato: per nessun valore di k è determinato o impossibile.

Calcoliamo le soluzioni del sistema nel caso k = -1. Poiché $a\_{12,13}=8\ne 0$, il sistema diventa:

$$\left\{\begin{array}{c}-2z=-t-1\\4x-z=-2y+t\end{array}\right.$$

$∆=a\_{12,13}=8;$

$$∆\_{x}=\left|\begin{matrix}-t-1&-2\\-2y+t&-1\end{matrix}\right|=t+1-4y+2t=-4y+3t+1;$$

$$∆\_{z}=\left|\begin{matrix}0&-t-1\\4&-2y+t\end{matrix}\right|=-4\left(t+1\right).$$

 Quindi le soluzioni del sistema sono:

$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{-4y+3t+1}{8}\\z=\frac{-4\left(t+1\right)}{8}=-\frac{t+1}{2}\end{array}\right.$ , $∀y,t\in R.$

(Q4) E’ data la funzione $f:R^{3}⟶R^{3} \ni ' ∀(x,y,z)\in R^{3}:f\left(x,y,z\right)=\left(x+y,y+z,x+z\right),. $

1. Dimostriamo che f è un’applicazione lineare.
2. $∀u\_{1},u\_{2}\in R^{3}:f\left(u\_{1}+u\_{2}\right)=f\left(\left(x\_{1},y\_{1},z\_{1}\right)+\left(x\_{2},y\_{2},z\_{2}\right)\right)=f\left(x\_{1}+x\_{2},y\_{1}+y\_{2},z\_{1}+z\_{2}\right)=$

$$=(x\_{1}+x\_{2}+y\_{1}+y\_{2},y\_{1}+y\_{2}+z\_{1}+z\_{2},x\_{1}+x\_{2}+z\_{1}+z\_{2)}=$$

$$=\left(\left(x\_{1}+y\_{1}\right)+\left(x\_{2}+y\_{2}\right),\left(y\_{1}+z\_{1}\right)+\left(y\_{2}+z\_{2}\right),\left(x\_{1}+z\_{1}\right)+\left(x\_{2}+z\_{2}\right)\right)=$$

 = ($x\_{1}+y\_{1}, y\_{1}+z\_{1},x\_{1}+z\_{1})+(x\_{2}+y\_{2}, y\_{2}+z\_{2},x\_{2}+z\_{2})=$

 $=f\left(x\_{1},y\_{1},z\_{1}\right)+f\left(x\_{2},y\_{2},z\_{2}\right)=f\left(u\_{1}\right)+f\left(u\_{2}\right).$

1. $∀k\in R,∀u\in R^{3}:f\left(ku\right)=f(k\left(x,y,z\right)=f\left(kx,ky,kz\right)=\left(kx+ky,ky+kz,kx+kz\right)=$

$$=\left(k\left(x+y\right),k\left(y+z\right),k(x+z\right))=k\left(x+y,y+z,x+z\right)=kf\left(x,y,z\right)=kf\left(u\right).$$

1. $∀u^{'}\in Im\left(f\right):u^{'}=f\left(u\right)=f\left(x,y,z\right)=\left(x+y,y+z,x+z\right)=\left(x,0,x\right)+\left(y,y,0\right)+\left(0,z,z\right)=$

$=x\left(1,0,1\right)+y\left(1,1,0\right)+z\left(0,1,1\right)⟹Im\left(f\right)=L(u\_{1}^{'}\left(1,0,1\right),u\_{2}^{'}\left(1,1,0\right),u\_{3}^{'}\left(0,1,1\right))$.

Poiché $\left|\begin{matrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{matrix}\right|=1+1+0-\left(0+0+0\right)=2\ne 0, $($u\_{1}^{'}\left(1,0,1\right),u\_{2}^{'}\left(1,1,0\right),u\_{3}^{'}\left(0,1,1\right)) $sono L.I.

Quindi, una base è $B\_{Im(f)}=\left\{u\_{1}^{'}\left(1,0,1\right),u\_{2}^{'}\left(1,1,0\right),u\_{3}^{'}\left(0,1,1\right)\right\}$ e dim $Im\left(f\right)= $3.

1. $∀u\in Ker\left(f\right):f\left(u\right)=0⟹\left(x+y,y+z,x+z\right)=(0,0,0)⟹\left\{\begin{array}{c}x+y=0\\y+z=0\\x+z=0\end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}x=-y\\z=-y\\-2y=0\end{array}⟹\right.\right.$

$⟹\left\{\begin{array}{c}x=0\\y=0\\z=0\end{array}⟹∀ u\in Ker\left(f\right):u=0⟹Ker\left(f\right)=\left\{0\right\}\right.$.

Dunque, Ker(f) non ha basi e dim Ker(f) = 0.

(Q5)

(a) E’ data la conica di equazione x2 - 4xy + 6x - 4y + 1 = 0.

Le matrici associate alla conica sono:

$$A=\left(\begin{matrix}1&-2&3\\-2&0&-2\\3&-2&1\end{matrix}\right) e A^{00}=\left(\begin{matrix}1&-2\\-2&0\end{matrix}\right).$$

Poiché $I\_{2}=\left|A^{00}\right|=-4<0⟹$ la conica è un’iperbole e poiché

$$I\_{3}=\left|A\right|=\left|\begin{matrix}1&-2&3\\-2&0&-2\\3&-2&1\end{matrix}\right|=12+12-(0+4+4)=16\ne 0, $$

la conica è non degenere.

1. Calcoliamo gli autovalori di A00.

$$\left|A^{00}-λI\right|=0⟹\left|\begin{matrix}1-λ&-2\\-2&0-λ\end{matrix}\right|=0⟹\left(-λ\right)\left(1-λ\right)-4=0⟹λ^{2}-λ-4=0.$$

$$∆=17, λ\_{1/2}=\frac{1\pm \sqrt{17}}{2}.$$

L’equazione canonica dell’iperbole è

$$λ\_{1}x^{2}+λ\_{2}y^{2}+t=0⟺\frac{1+\sqrt{17}}{2}x^{2}+\frac{1-\sqrt{17}}{2}y^{2}+t=0$$

la cui matrice associata è

$$B=\left(\begin{matrix}\frac{1+\sqrt{17}}{2}&0&0\\0&\frac{1-\sqrt{17}}{2}&0\\0&0&t\end{matrix}\right).$$

Imponiamo che $\left|B\right|=\left|A\right|⟹\frac{1-17}{4}t=16⟹-4t=16⟹t=-4.$

Quindi, l’equazione canonica dell’iperbole è

$$\frac{1+\sqrt{17}}{2}x^{2}-\frac{\sqrt{17}-1}{2}y^{2}-4=0⟺\frac{1+\sqrt{17}}{8}x^{2}-\frac{\sqrt{17}-1}{8}y^{2}=1⟺$$

$$⟺\frac{x^{2}}{\frac{8}{1+\sqrt{17}}}-\frac{y^{2}}{\frac{8}{\sqrt{17}-1}}=1.$$

(Q6) Sono dati il punto P(1,0,0) e la retta r di equazioni $\left\{\begin{array}{c}x-1=0\\y-z+2=0\end{array}\right. . $

1. Calcoliamo i parametri direttori di r. Considerata la matrice $\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&-1\end{matrix}\right)$, si ha:

$l=o,m=1,n=1$.

Calcoliamo, ora, il piano $π$ passante per P(1,0,0) e perpendicolare alla retta r:

$$l\left(x-1\right)+m\left(y-0\right)+n\left(z-0\right)=0⟹y+z=0$$

e sia $P^{'}=π∩r:\left\{\begin{array}{c}y+z=0\\x-1=0\\y-z+2=0\end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}x=1\\z=-y\\2y+2=0\end{array}⟹\left\{\begin{array}{c}x=1\\y=-1\\z=1\end{array}⟹P^{'}\left(1,-1,1\right).\right.\right.\right.$

Quindi:

$r^{'}\left(P,⊥r\right)=PP^{'}$ ha parametri direttori $l^{'}=0,m^{'}=-1,n^{'}=1$ ed equazioni

$$\left\{\begin{array}{c}x-1=0\\\frac{y-0}{-1-0}=\frac{z-0}{1-0}\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}x-1=0\\y+z=0\end{array}.\right.\right.$$

1. $d\left(P,r\right)=\overbar{PP^{'}}=\sqrt{(1-1)^{2}+(0+1)^{2}+(0-1)^{2}}=\sqrt{2}.$